Obtención de los segmentos elementales y segmentos compuestos.

Gonzalo Vilches Urcelay

2023

Las siguientes diez páginas son la demostración de los conceptos básicos que empleamos en de la demostración de la conjetura de Collatz, es decir, sobre los segmentos elementales y los segmentos compuestos.

Este documento se puede dividir en dos puntos centrales:

Primero veremos un método algebraico que nos permite deducir los segmentos elementales, lo cuales son los componentes básicos de los segmentos compuestos.

El segundo punto se refiere al montaje de los segmentos compuestos y sobre la diferenciación de aquellos montajes que son aplicables a la conjetura de aquellos que no los son. Esta distinción es así porque de existir segmentos compuestos que se obtienen aplicando la función g dos o más veces seguidas o segmentos que refutan la conjetura mediante divergencias, estos no pertenecerían al marco teórico de la conjetura de Collatz. Esto pueden leerlo en el documento “Demostración de la conjetura de Collatz por medio del operador raíz digital” en mi página web. De todos modos, lo veremos con algunos ejemplos en las últimas páginas de este documento.

Ahora empecemos por demostrar los dieciocho segmentos elementales, los cuales son los componentes básicos de los segmentos compuestos.

A) Demostración de los segmentos elementales:

Recordemos primero que los subconjuntos de A_s son los siguientes,

$$A_s = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8,\ A_9\}.$$

Cada uno de los nueve subconjuntos de A_s está compuesto tanto por elementos pares como por elementos impares. Por tal ver esto, fijémonos en los elementos que tiene el subconjunto A_1:

$$A_1 = \{1 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{1,\ 10,\ 19,\ 28,\ \dots\}.$$

(1 impar, 10 par, 19 impar, 28 par, …).

Veamos también el segundo subconjunto de A_s:

$$A_2 = \{2 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \dots\}.$$

(2 par, 11 impar, 20 par, 29 impar, …).

1.- Demostración de los segmentos elementales uno y diez:

Ahora bien, si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los elementos impares por separado del subconjunto A_1 entonces lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$A_{pares} = \{1 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{10,\ 28,\ 46,\ 64,\ \ldots\}.$$
$$A_{impares} = \{1 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{1,\ 19,\ 37,\ 55,\ \ldots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_1$, al ser divididos entre dos, darán cada uno de los elementos de A_5:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{1+9\cdot(2n+1)}{2} = \frac{10+9\cdot(2n)}{2} = 5 + 9 \cdot n.$$

De forma más visual, aunque no formal:

$$A_5 = \frac{\{10, 28, 46, 64, \ldots\}}{2} = \{5,\ 14,\ 23,\ 32,\ \ldots\}.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_1$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_4, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente ecuación:

$$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [1 + 9 \cdot (2n)] + 1 = 4 + 9 \cdot (6n).$$

Con estas operaciones podemos garantizar lo siguiente:

1) Al dividir entre dos un número par que pertenece a A_1 obtendremos siempre un número natural del subconjunto A_5.

   $A_1 \to A_5$ (Primer segmento elemental)

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_1 obtendremos siempre un número natural del subconjunto A_4.

   $A_1 \to A_4$ (Segmento elemental número diez).

2.- Demostración de los segmentos elementales dos y once:

Si no ha quedado claro, en las siguientes me dedicare a demostrar cada uno de los segmentos elementales, empezando por los elementos del subconjunto A_2 cuyos componentes también alternan entre pares e impares:

$$A_2 = \{2 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{2,\ 11,\ 20,\ 29,\ \ldots\}.$$

(2 par, 11 impar, 20 par, 29 impar, …).

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los elementos impares por separado entonces lo podemos hacer de la siguiente manera:

$$A_{pares} = \{2 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{2,\ 20,\ 38,\ 56\ \ldots\}.$$

$$A_{impares} = \{2 + 9 \cdot (2n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{11,\ 29,\ 47,\ 65\ \ldots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_2$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_1:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{2+9\cdot(2n)}{2} = 1 + 9 \cdot n.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_2$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_7, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en las siguientes ecuaciones:

$$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [2 + 9 \cdot (2n+1)] + 1 = 7 + 9 \cdot (6n+3).$$

Después de estas operaciones podemos garantizar lo siguiente:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_2 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_1.

   $A_2 \rightarrow A_1$ (segmento elemental número dos).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_2 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_7.

   $A_2 \rightarrow A_7$ (segmento elemental número once).

3.- Demostración de los segmentos elementales tres y doce:

Por tal de obtener el segmento elemental número tres y doce, haremos el mismo procedimiento que hemos aplicado en las páginas anteriores.

Partimos del subconjunto A_3, cuyos elementos se alternan entre números pares e impares:

$$A_3 = \{3 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{3,\ 12,\ 21,\ 30\ \ldots\}.$$

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los elementos impares por separado, lo haremos empleando las siguientes expresiones:

$$A_{impares} = \{3 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{3,\ 21,\ 39,\ 57\ \ldots\}.$$

$$A_{pares} = \{3 + 9 \cdot (2n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{12,\ 30,\ 48,\ 66\ \ldots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_3$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_6:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{3+9\cdot(2n+1)}{2} = \frac{12+9\cdot(2n)}{2} = 6 + 9 \cdot n.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_3$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_1, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$$3 \cdot (A_{impar}) + 1 = 3 \cdot [3 + 9 \cdot (2n)] + 1 = 1 + 9 \cdot (6n + 1).$$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_3 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_6.

   $A_3 \rightarrow A_6$ (segmento elemental número tres).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_3 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_1..

   $A_3 \rightarrow A_1$ (segmento elemental número doce).

4.- Demostración de los segmentos elementales cuatro y trece:

Partimos del subconjunto A_4 observando que está compuesto por elementos pares y por elementos impares:

$$A_4 = \{4 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{4,\ 13,\ 22,\ 31\ \dots\}.$$

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$$A_{pares} = \{4 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{4,\ 22,\ 40,\ 58\ \dots\}.$$

$$A_{impares} = \{4 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{13,\ 31,\ 49,\ 67,\ \dots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_4$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_2:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{4+9\cdot(2n)}{2} = 2 + 9 \cdot n.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_4$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_4, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [4 + 9 \cdot (2n + 1)] + 1 = 4 + 9 \cdot (6n + 4).$$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_4 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_2:

$A_4 \rightarrow A_2$ (segmento elemental número cuatro).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_4 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_4.

$A_4 \rightarrow A_4$ (segmento elemental número trece).

5.- Demostración de los segmentos elementales cinco y catorce:

Partimos del subconjunto A_5 observando que está compuesto por elementos pares y por elementos impares:

$$A_5 = \{5 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{5,\ 14,\ 23,\ 32,\ \ldots\}.$$

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$$A_{pares} = \{5 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{14,\ 32,\ 50,\ 68 \ldots\}.$$

$$A_{impares} = \{5 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{5,\ 23,\ 41,\ 59 \ldots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto A_5 al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_7:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{5+9\cdot(2n+1)}{2} = \frac{14+9\cdot(2n)}{2} = 7 + 9 \cdot n.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_5$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_7, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$$3 \cdot \left(A_{impares}\right) + 1 = 3 \cdot [5 + 9 \cdot (2n + 1)] + 1 = 7 + 9 \cdot (6n + 4).$$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_5 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_7.

$A_5 \rightarrow A_7$ (segmento elemental número cinco).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_5 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_7.

$A_5 \longmapsto A_7$ (segmento elemental número catorce).

6.- Demostración de los segmentos elementales seis y quince:

Partimos del subconjunto A_6 observando que está compuesto tanto por elementos pares como por elementos impares:

$A_6 = \{6 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{6,\ 15,\ 24,\ 33,\ \dots\}$.

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$A_{pares} = \{6 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{6,\ 24,\ 42,\ 60\ \dots\}$.

$A_{impares} = \{6 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{15,\ 33,\ 51,\ 69\ \dots\}$.

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_6$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_3:

$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{6+9\cdot(2n)}{2} = 3 + 9 \cdot n$.

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_6$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_1, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [6 + 9 \cdot (2n + 1)] + 1 = 1 + 9 \cdot (6n + 5)$.

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_6 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_3.

   $A_6 \to A_3$ (segmento elemental número seis).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_6 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_1.

   $A_6 \to A_1$ (segmento elemental número quince).

7.- Demostración de los segmentos elementales siete y dieciséis:

Partimos del subconjunto A_7 observando que está compuesto tanto por elementos pares como por elementos impares:

$A_7 = \{7 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{7,\ 16,\ 25,\ 34,\ \dots\}$.

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$A_{pares} = \{7 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{16,\ 34,\ 52,\ 70,\ \dots\}$.

$A_{impares} = \{7 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{7,\ 25,\ 43,\ 61,\ \dots\}$.

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_7$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_8:

$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{7+9\cdot(2n+1)}{2} = \frac{16+9(2n)}{2} = 8 + 9 \cdot n.$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_7$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_4, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [7 + 9 \cdot (2n)] + 1 = 4 + 9 \cdot (6n + 2).$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_7 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_8.

   $A_7 \rightarrow A_8$ (segmento elemental número siete).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_7 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_4.

   $A_7 \rightarrow A_4$ (segmento elemental número dieciséis).

8.- Demostración de los segmentos elementales ocho y diecisiete:

Partimos del subconjunto A_8 observando que está compuesto tanto por elementos pares como por elementos impares:

$A_8 = \{8 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{8,\ 17,\ 26,\ 35,\ \ldots\}.$

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$A_{pares} = \{8 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{8,\ 26,\ 44,\ 62,\ \ldots\}.$

$A_{impares} = \{8 + 9 \cdot (2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{17,\ 35,\ 53,\ 71,\ \ldots\}.$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_8$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_4:

$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{8+9\cdot(2n)}{2} = 4 + 9 \cdot n.$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_8$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_7, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$3 \cdot (A_{impares}) + 1 = 3 \cdot [8 + 9 \cdot (2n + 1)] + 1 = 7 + 9 \cdot (6n + 5).$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_8 obtendremos siempre un número natural que pertenece a A_4.

$A_8 \to A_4$ (segmento elemental número ocho).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_8 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_7.

$A_8 \to A_7$ (segmento elemental número diecisiete).

9.- Demostración de los segmentos elementales nueve y dieciocho:

Partimos del subconjunto A_9 observando que está compuesto tanto por elementos pares como por elementos impares:

$$A_9 = \{9 + 9 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{9,\ 18,\ 27,\ 36,\ \ldots\}.$$

Si queremos hacer referencia a los elementos pares y a los impares por separado, lo podemos hacer empleando las siguientes expresiones:

$$A_{pares} = \{9 + 9 \cdot (2n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{18,\ 36,\ 54,\ 72,\ \ldots\}.$$

$$A_{impares} = \{9 + 9 \cdot (2n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{9,\ 27,\ 45,\ 63,\ \ldots\}.$$

De este modo podremos operar algebraicamente con los respectivos subconjuntos, y podremos comprobar fácilmente que todos los elementos del subconjunto $A_{pares} \subset A_9$ al ser divididos entre dos dará cada uno de los elementos de A_9:

$$\frac{A_{pares}}{2} = \frac{9+9\cdot(2n+1)}{2} = \frac{18+9\cdot(2n)}{2} = 9 + 9 \cdot n.$$

Por otro lado, si consideramos los elementos del subconjunto $A_{impares} \subset A_9$ y, como dice la conjetura, multiplicamos por tres y sumamos uno a cada uno de los elementos del subconjunto, obtendremos siempre elementos del subconjunto A_1, que además serán pares. Esto lo podemos ver de forma clara en la siguiente expresión:

$$3 \cdot (A_{pares}) + 1 = 3 \cdot [9 + 9 \cdot (2n)] + 1 = 1 + 9 \cdot (6n + 3).$$

Después de estas operaciones podemos garantizar las siguientes afirmaciones:

1) Al dividir un número par que pertenece a A_9 obtendremos siempre un número natural que pertenece a su mismo conjunto, A_9.

$A_9 \to A_9$ (segmento elemental número nueve).

2) Al multiplicar por tres y sumar uno a un número impar que pertenece a A_9 obtendremos siempre un número natural que pertenece al subconjunto A_1.

$A_9 \to A_1$ (segmento elemental número dieciocho).

B) Combinación de segmentos elementales.

Al momento de combinar segmentos elementales por tal de obtener los llamados segmentos compuestos, hemos de tener en cuenta lo siguiente:

(a) Solo podremos combinar dos segmentos elementales si el primer componente de uno de los segmentos elementales coincide con el segundo componente de otro segmento elemental.
(b) Después de multiplicar por tres y sumar uno a un número cualquiera, la siguiente operación que se aplica es siempre la de dividir entre dos.

Como ejemplo, veremos cómo construir los siguientes dos segmentos compuestos a partir de los segmentos elementales y veremos cuál de ellos es aplicable a la conjetura y cual no:

$$\eta:\ A_7 \to A_8 \to A_4 \to A_4 \to A_2$$

$$\mu:\ A_4 \to A_2 \to A_1 \to A_4 \to A_4.$$

El segmento compuesto η se crea a partir de los siguientes segmentos elementales,

$$(A_7 \to A_8) + (A_8 \to A_4) + (A_4 \to A_4) + (A_4 \to A_2)$$

y es aplicable a la conjetura porque tiene en cuenta las sentencias (a) y (b).

Por otro lado, el segmento compuesto μ se crea a partir de los siguientes segmentos elementales,

$$(A_4 \to A_2) + (A_2 \to A_1) + (A_1 \to A_4) + (A_4 \to A_4).$$

Sin embargo, no es aplicable a la conjetura ya que, todo y cumplir la sentencia (a), no cumple la sentencia (b). Esto es así porque al pasar de $A_1 \to A_4$ hemos multiplicado por tres y sumado uno, y luego lo hemos combinado con el segmento $A_4 \to A_4$, el cual también se obtiene multiplicando por tres y sumando uno. Por lo tanto, el segmento compuesto μ no es aplicable a la conjetura ya que en ningún segmento compuesto se pueden dar dos multiplicaciones de forma seguida (o lo mismo, aplicar la función g dos veces seguida).

Breve Resumen:

A partir de los segmentos elementales podemos obtener todos los segmentos compuestos existentes. Como hemos visto, no todos los segmentos compuestos son segmentos que se aguanten en el marco teórico de la conjetura de Collatz.

Los segmentos compuestos se pueden clasificar según si son aplicables a la conjetura o no:

Aplicables a la conjetura:	No aplicables a la conjetura.
Flujos numéricos de todos los números naturales sin incluir el cero.	Divergencias. Segmentos imposibles (rompe al menos una de las dos condiciones expuestas en la página anterior).