Demostración de la Conjetura de Collatz por medio del operador raíz digital

$$D(3\cdot n+1)$$

Autor: Gonzalo Vilches Urcelay

Año: 2021-2024

Abstract en castellano

En este trabajo de investigación buscamos resolver una conjetura bien conocida debido a la sencillez con la que se puede enunciar. Esta conjetura ha recibido muchos nombres a lo largo del tiempo, como lo son, problema de Kakutani, conjetura de Thwaites, algoritmo de Hasse o problema de Syracuse, pero es más conocido bajo el nombre de conjetura de Collatz, ideada en 1937 por el matemático Lothar Collatz.

En el documento proponemos un método que nos permite comprobar la veracidad de la conjetura de Collatz empleando únicamente el operador raíz digital, algo de desarrollo algebraico y pura deducción lógica. El método consiste en calcular una serie de ecuaciones que nos permita obtener aquellos hipotéticos números que refutan la conjetura, ya sea formando un bucle cerrado o provocando un crecimiento con tendencia al infinito.

Lo primero que haremos será clasificar todos los números naturales en nueve subconjuntos y, posteriormente, buscaremos que elementos de cada subconjunto refutan la conjetura, encontrando así una ecuación que describe tales elementos. Sin embargo, veremos que todas las posibles soluciones a estas ecuaciones son divergencias no aplicables a la conjetura, a excepción de la única solución que arroja números naturales, los elementos del propio bucle cerrado trivial.

Posterior a esto, afirmamos que la conjetura de Collatz es cierta para todos los números naturales sin incluir el cero, pues aquellos números que la refutan no pertenecen al marco teórico de la misma, es decir, los números naturales.

Abstract en ingles

In this research work, we seek to solve a well-known conjecture due to the simplicity with which it can be stated. This conjecture has received many names over time, such as the Kakutani problem, the Thwaites conjecture, the Hasse algorithm or the Syracuse problem, but it is better known under the name of the Collatz conjecture, devised in 1937 by the mathematic Lothar Collatz.

In the document we propose a method that allows us to verify the veracity of the Collatz conjecture using only the digital root operator, some algebraic development and pure logical deduction. The method consists of calculating a series of equations that allows us to obtain those hypothetical numbers that refute the conjecture, either forming a closed loop or causing growth with a tendency to infinity.

The first thing we will do is classify all the natural numbers into nine subsets and, later, we will look for the elements of each subset that refute the conjecture, thus finding the equation that describes such elements. However, we will see that all the viable solutions to these equations are divergences not applicable to the conjecture, except for the only solution that yields natural numbers, the elements of the closed trivial loop itself.

After this, we affirm that the Collatz conjecture is true for all natural numbers excluding zero since the equations show that every other possibility reaches us to a divergence, that is not included in the theoretical framework, natural numbers.

Índice

I.- Introducción:

1.1 Agradecimientos.

Este apartado va dedicado a esas personas que han prestado su apoyo incondicional a esta investigación desde el principio. Primeramente, mi hermana mayor y mis padres, quienes me ayudaron a realizar los detalles de la redacción del trabajo y me animaron a continuar cuando quería dejar mis estudios. Después, a las personas que me han ayudado indirectamente en clases, en especial a aquellos profesores que explican cosas interesantes pese a no estar en el temario y a quienes se esfuerzan por responder preguntas difíciles que poco o nada tienen que ver con el tema. Gracias a todas esas personas que me han ayudado en este proceso de desarrollo.

1.2 Conjetura de Collatz.

En este trabajo nos centramos en verificar la conjetura de Collatz, conjetura muy conocida y estudiada debido a la sencillez con la que se puede enunciar y entender. La hipótesis fue presentada por el matemático Lothar Collatz en el año 1937.

La conjetura dice que cualquier número natural que sea sometido al proceso de Collatz tendrá como resultado final el número natural uno, donde el proceso de Collatz se compone por la aplicación continuada de la función h, compuesta por otras dos funciones, f y g:

1. Si el número es par aplicamos la función f, que consiste en dividir el número entre dos.

2. Si el número es impar entonces aplicamos la función g, que consiste en multiplicar por tres y sumar uno al número.

Después de efectuar esta primera operación obtendremos otro número natural al cual se le volverá a aplicar la función h de Collatz según si es un número par o impar, y lo mismo con sus posteriores resultados. Según la conjetura propuesta por Lothar Collatz, mediante este proceso continuado llegaremos siempre al número natural uno y, en consecuencia, al bucle trivial formado por la siguiente secuencia:

$$(4 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow (4 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \rightarrow (4 \rightarrow 2 \rightarrow 1) \ldots$$

1.3 Método de resolución de la Conjetura.

Por tal de demostrar que la conjetura de Collatz es cierta, primero tendremos que suponer que esta es falsa y calcular los hipotéticos números que la refutan. Sabemos de antemano que la conjetura de Collatz será falsa únicamente en uno de los siguientes casos:

1. Existe un número natural que, al ser sometido a la conjetura, forma un bucle cerrado distinto al trivial.

2. Existe un número natural que, al ser sometido a la conjetura, tiende a crecer al infinito.

Partiendo de la suposición de que ambos casos son ciertos, buscaremos entre todos los números naturales aquellos elementos que refutan la conjetura, encontrando que todos los hipotéticos elementos que la refutan siempre pertenecen al siguiente conjunto:

$A_i = \left\{ \lim_{x,\, y \to \infty} ⬚ s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$

Por otro lado, también seremos capaces de deducir que todos los elementos que sí cumplen la conjetura pertenecen al siguiente conjunto:

$A_i = \left\{ \lim_{x \to \infty} ⬚ s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n,\, y \in \mathbb{N}_0 \right\} = \mathbb{N}.$

Afirmando de este modo que la conjetura de Collatz es cierta, ya que todos los hipotéticos números que la refutan son divergencias no aplicables al marco teórico de la conjetura.

II.- Marco teórico:

En el marco teórico expondremos todas las herramientas que emplearemos durante este trabajo, y definiremos ciertos conceptos que nos servirán en la demostración.

2.1 Operador raíz digital.

La raíz digital es un operador matemático como lo son la suma, la resta o la multiplicación. Este consiste en sumar los dígitos de un número natural y obtener un resultado de un único dígito y, si el resultado da un número con más de un dígito, entonces se vuelve a realizar la operación de sumar los dígitos hasta reducirlo a únicamente a uno. El operador se simboliza como $D(a)$, y se lee como raíz digital de "a". Un ejemplo de cómo funciona el operador es el siguiente:

$$D(291) = D(2 + 9 + 1) = D(12) = D(1 + 2) = 3$$

$$D(291) = 3$$

Sabiendo que todo número natural tiene raíz digital y que la diferencia entre números de la misma raíz es un múltiplo de nueve, podemos deducir la siguiente igualdad:

(1) $\quad a = D(a) + 9 \cdot n \, \forall \, a \in \mathbb{N}_0.$

Empleando esta ecuación podemos describir un conjunto de números naturales A y, posteriormente, clasificar todos los elementos del conjunto A en nueve subconjuntos A_s. De manera más rigurosa podemos escribir lo siguiente:

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{N} \;\; A \neq \emptyset$ diremos que un número natural a pertenece a uno de los subconjuntos de A cuando $D(a) = s$, donde s define a que subconjunto A_s pertenece. ($s = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8,\, 9\}$).

Podemos definir los elementos del conjunto A mediante la siguiente expresión:

(2) $\quad A = \{D(a) + 9 \cdot n : \, a \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}_0\}.$

Y los elementos de cualquiera de los nueve subconjuntos de A definiendo el valor de s en la siguiente expresión:

(3) $\quad A_s = \{s + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}.$

Obteniendo los siguientes nueve subconjuntos numéricos de A :

(3.1) $\quad A_1 = \{1 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{1,\, 19,\, 28,\, \ldots\}.$

(3.2) $A_2 = \{2 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{2,\ 20,\ 29,\ \dots\}$.

(3.3) $A_3 = \{3 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{3,\ 21,\ 30,\ \dots\}$.

(3.4) $A_4 = \{4 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{4,\ 22,\ 31,\ \dots\}$.

(3.5) $A_5 = \{5 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{5,\ 23,\ 32,\ \dots\}$.

(3.6) $A_6 = \{6 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{6,\ 24,\ 33,\ \dots\}$.

(3.7) $A_7 = \{7 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{7,\ 25,\ 34,\ \dots\}$.

(3.8) $A_8 = \{8 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{8,\ 26,\ 35,\ \dots\}$.

(3.9) $A_9 = \{9 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{9,\ 27,\ 36,\ \dots\}$.

Como podemos ver, estos nueve subconjuntos clasifican los elementos del conjunto A según su raíz digital. Por ejemplo, todos los elementos del subconjunto A_1 tienen como raíz digital el uno.

Esto también se puede interpretar como una clasificación de los números naturales según el resto del módulo nueve, sin embargo, la notación de la presente demostración se basará en el operador raíz digital y no en conceptos de aritmética modular. Esto nos permitirá visualizar de mejor manera las expresiones algebraicas y, a mi parecer, dar una demostración más intuitiva.

Es necesario indicar que si queremos hacer referencia a un subconjunto de elementos de A_s lo denotaremos como A_i y se entenderá de la siguiente manera:

Si $A_i \subset A_s$, entonces $A_s = \{s + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ y $A_i = \{s + 9 \cdot q(n) : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde $q(n)$ es una función que arroja únicamente valores naturales. Por ejemplo, uno de los infinitos subconjuntos $A_i \subset A_4$:

$A_4 = \{4 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ y $A_i = \{4 + 9 \cdot (2n + 3) : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde $q(n) = 2n + 3$.

2.2 Órbita digital y órbita digital extendida.

La órbita digital de un número dado se compone por todos los subconjuntos A_s por los que pasa un número hasta llegar al número natural uno por primera vez. Si queremos hacer referencia al conjunto de valores A_s por los que pasa incluyendo los subconjuntos por los que se pasa al recorrer el bucle trivial, lo denotaremos como órbita digital extendida.

Por tal de ejemplificar este apartado, calcularemos la órbita digital y la órbita digital extendida del número natural 32:

Partimos del número natural $32 \in A_5$.

32 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $16 \in A_7$.

16 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $8 \in A_8$.

8 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $4 \in A_4$.

4 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $2 \in A_2$.

2 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $1 \in A_1$.

Por lo tanto, la órbita digital que sigue el número 32 es la siguiente:

$A_5 \to A_7 \to A_8 \to A_4 \to A_2 \to A_1$.

Por otro lado, la órbita digital extendida es lo mismo que la órbita digital, pero teniendo en cuenta el bucle trivial, por lo tanto, continuamos desde el uno:

1 es impar, entonces aplicamos g y obtenemos $4 \in A_4$.

4 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $2 \in A_2$.

2 es par, entonces aplicamos f y obtenemos $1 \in A_1$.

Y así de forma cíclica aplicando el bucle trivial, con lo que obtenemos que la órbita digital extendida del número natural 32 es la siguiente:

$$A_5 \to A_7 \to A_8 \to A_4 \to A_2 \to A_1 \to (A_4 \to A_2 \to A_1) \to (A_4 \to A_2 \to A_1) \to \cdots$$

Como podemos ver, la órbita extendida de un número dado está compuesto por infinitos subconjuntos A_s, ya que el bucle trivial nunca se detiene.

Cabe destacar que existe otro número natural que comparte la misma órbita digital extendida que el 32, y este es el número 5. La diferencia radica en la secuencia de funciones que hemos de aplicar, donde la primera operación que se aplica al 32 es f , mientras que la primera operación que se aplica al 5 es la función g . En el siguiente punto hablamos de como diferenciaremos esto por tal de que cada órbita digital se pueda distinguir correctamente de otros.

2.2.1 Segmentos elementales de órbita digital.

Los segmentos elementales son fragmentos de órbita digital que están formados únicamente por dos subconjuntos A_s. En total existen dieciocho segmentos elementales, con los cuales podemos construir cualquier órbita digital existente. La siguiente tabla recoge los segmentos elementales y la función que hemos aplicado por tal de obtener el segundo componente:

	Obtenidos aplicando f a A_s		Obtenidos aplicando g a A_s
1)	$A_1 \to A_5$	10)	$A_1 \mapsto A_4$
2)	$A_2 \to A_1$	11)	$A_2 \mapsto A_7$
3)	$A_3 \to A_6$	12)	$A_3 \mapsto A_1$
4)	$A_4 \to A_2$	13)	$A_4 \mapsto A_4$
5)	$A_5 \to A_7$	14)	$A_5 \mapsto A_7$
6)	$A_6 \to A_3$	15)	$A_6 \mapsto A_1$
7)	$A_7 \to A_8$	16)	$A_7 \mapsto A_4$
8)	$A_8 \to A_4$	17)	$A_8 \mapsto A_7$
9)	$A_9 \to A_9$	18)	$A_9 \mapsto A_1$

Como hemos dicho, combinando estos segmentos elementales podemos construir cualquier órbita digital y/o cualquier segmento compuesto.

Debido a que existen dos segmentos elementales que, pese a obtenerse de formas distintas, están compuestos por el mismo par de subconjuntos A_s, nos vemos obligados a diferenciarlos. Estos dos segmentos elementales son el número 5 y el número 14 y, por tal de diferenciarlos, hemos cambiado ligeramente la flecha que simboliza el nexo cuando a A_s se le aplica la función g . De esta forma las órbitas digitales, por ejemplo, de los números 32 y 5 quedarían diferenciadas de la siguiente forma:

Órbita digital del 32:

$A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8 \rightarrow A_4 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1.$

Órbita digital del 5:

$$A_5 \mapsto A_7 \rightarrow A_8 \rightarrow A_4 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1.$$

Si desea ver una demostración más exhaustiva de la obtención de los segmentos elementales puede consultar el documento “Extensión necesaria”, el cual encontrara en la entrada de la siguiente página web:

Mi página web.

2.2.2 Segmento compuesto de órbita digital.

Un segmento compuesto de órbita digital es una combinación de dos o más segmentos elementales que, a diferencia de la órbita digital, no tiene por qué terminar en el número natural uno y, por lo tanto, tampoco en la órbita digital extendida del bucle trivial. Sin embargo, el segmento compuesto siempre ha de terminará con un segmento elemental que involucre a la función f .

Otra cosa que cabe aclarar es que, suponiendo que la conjetura es cierta, no todos los segmentos compuestos son aplicables a la conjetura, es por eso por lo que distinguiremos aquellos segmentos compuestos que son aplicables a la conjetura de aquellos que no lo son:

Segmentos compuestos aplicables a la conjetura:	·Órbitas digitales de todos los números naturales sin incluir el cero.
Segmentos compuestos no aplicables a la conjetura:	·Divergencias (elementos no naturales). ·Segmentos compuestos imposibles.

Es por esto por lo que todas las órbitas digitales son segmentos compuestos, pero no todos los segmentos compuestos son órbitas digitales.

Como ejemplos, veremos un segmento compuesto aplicable a la conjetura y tres segmentos compuestos no aplicables a la conjetura:

1) Segmento compuesto aplicable a la conjetura:

$A_3 \mapsto A_1 \rightarrow A_5 \mapsto A_7.$

El cual se obtiene mediante la combinación de los siguientes segmentos elementales:

$A_3 \mapsto A_1$, $A_1 \rightarrow A_5$, $A_5 \mapsto A_7.$

2) Segmento compuesto no aplicable a la conjetura:

$A_7 \mapsto A_4 \mapsto A_4 \to A_2.$

El cual se obtiene mediante la combinación de los siguientes segmentos elementales:

$$A_7 \mapsto A_4 \,,\; A_4 \mapsto A_4 \,,\; A_4 \to A_2.$$

Este segundo segmento compuesto no es aplicable a la conjetura ya que se aplica la función g dos veces seguidas (simbolizado con la flecha $\mapsto$), lo cual no es posible, ya que sabemos que después de aplicar la función g siempre se aplica la función f .

3) Segmento compuesto no aplicable a la conjetura:

$$(A_7 \to A_8) \mapsto (A_7 \to A_8) \mapsto (A_7 \to A_8) \mapsto \cdots.$$

El cual se obtiene mediante la repetición indefinida del segmento elemental siete y diecisiete:

$A_7 \to A_8 \,,\; A_8 \mapsto A_7.$

Este tercer segmento compuesto no se aplica a la conjetura, ya que, como veremos en el marco práctico, todos los elementos que siguen son divergencias. Recordemos que la conjetura de Collatz se centra únicamente en los números naturales.

Como herramienta extra, les comparto el siguiente diagrama que incluye todas las órbitas digitales extendidas existentes en el marco de la conjetura de Collatz.

Diagrama de órbitas (Fuente propia)

Si quiere saber más sobre los segmentos compuestos no aplicables a la conjetura, puede consultar el documento PDF “Extensión necesaria” que encontrará en mi página web.

2.3 Proceso inverso de Collatz.

El proceso inverso de Collatz es muy sencillo, ya que son las operaciones inversas de Collatz:

Operaciones de Collatz (h)	Operaciones inversas de Collatz (h^{-1})
$3 \cdot n + 1 = c$	$\frac{c-1}{3} = n$
$\frac{n}{2} = c$	$2 \cdot c = n$

Estas operaciones inversas son relevantes para la obtención de los elementos que siguen determinado segmento compuesto o segmento elemental, tal y como veremos en el marco practico.

III.- Marco práctico:

En el marco práctico aprenderemos a calcular el subconjunto $A_i \subset A_s$ cuyos elementos siguen un segmento compuesto que nosotros fijaremos. Deduciremos la estructura que tienen aquellos hipotéticos números que, o bien forman un bucle cerrado distinto al trivial o bien hacen crecer al número con tendencia al infinito, viendo que estos hipotéticos números no pertenecen al conjunto de números naturales. También deduciremos el conjunto de elementos que, al ser sometidos a la conjetura, llegan al número natural uno en una cantidad finita de iteraciones.

3.1 Método de obtención de los elementos que siguen determinado segmento elemental o compuesto.

En este primer apartado del marco práctico aprenderemos a calcular los elementos de un subconjunto $A_i \subset A_s$ que siguen un determinado segmento compuesto o elemental, aplicable a la conjetura o no. Posteriormente, haremos una clasificación de los segmentos elementales que nos permitirá estudiar los segmentos compuestos en su totalidad.

Por tal de calcular los elementos del subconjunto A_i, primero hemos de fijar dos cosas: la primera es el subconjunto A_s del cual queremos partir, mientras que la segunda cosa es el segmento compuesto que queremos que sigan los elementos del subconjunto A_i. Si el segmento compuesto escogido tiene p componentes, entonces hemos de aplicar la función h al subconjunto A_s del cual partimos $p-1$ veces y, en consecuencia, las funciones f o g dependiendo del segmento compuesto que anteriormente hayamos fijado.

Es importante destacar que cuando queremos operar con un conjunto que tiene por elementos tanto números pares como impares, tendremos que sustituir el valor de n por $2n$ o $2n+1$ en la ecuación, según si queremos hacer referencia a los elementos pares o a los impares. Este proceso de sustitución se da únicamente tras dos situaciones:

A) La primera es cuando partimos de un subconjunto A_s y queremos definir si la primera función es f o g .
B) La segunda situación se da cada vez que aplicamos la función f y queremos definir si la siguiente función es f o g .

Posteriormente, cuando hayamos recorrido el segmento compuesto operando algebraicamente, llegaremos a una ecuación que describe un subconjunto de números que denominaremos A_f, al cual aplicaremos el recorrido inverso junto a las respectivas operaciones inversas, es decir, h^{-1} $p-1$ veces y, en consecuencia f^{-1} y g^{-1}. Por ejemplo, si hemos empezado aplicando la función f y la última función que hemos aplicado es g, entonces al momento de hacer el recorrido inverso empezaremos aplicando g^{-1} y terminaremos aplicando f^{-1}.

Al final de este proceso obtendremos un subconjunto $A_i \subset A_s$, donde los elementos de A_i siguen una variante de la ecuación que siguen los elementos del subconjunto A_s, con la diferencia de que los elementos del subconjunto A_i obtenido serán más grandes que los del conjunto A_s para todo valor de n, pues hemos tenido que modificarlo sustituyendo n por tal de que siga el segmento compuesto de órbita digital que habíamos fijado en un primer momento. Los elementos del subconjunto A_i que obtenemos son más grandes en función de la cantidad de veces que aplicamos la función f a lo largo del segmento compuesto que hayamos fijado.

Por tal de ejemplificar este apartado, calcularemos el subconjunto $A_i \subset A_8$ cuyos elementos siguen el siguiente segmento compuesto:

$$A_8 \to A_4 \mapsto A_4 \to A_2.$$

El cual tiene cuatro componentes, entonces, $p = 4$ .En consecuencia, tendremos que aplicar $p-1$ funciones, es decir, tres funciones, y son las siguientes:

1.- Aplicamos f .

2.- Aplicamos g .

3.- Aplicamos f .

Partimos de $A_s = A_8 = \{8 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$:

1.- Primera operación, aplicamos f :

En este caso, solo podremos dividir entre dos si todos los elementos de $A_s = A_8 = \{8 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ son pares, y esto solo ocurre cuando n toma valores pares $(n \to 2n)$, por lo tanto, sustituimos y operamos:

$$\frac{8 + 9 \cdot (2n)}{2} = 4 + 9 \cdot n$$

2.- Segunda operación, aplicamos g :

En este caso, solo podremos multiplicar por tres y sumar uno si todos los elementos del subconjunto $\{4 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ son impares, y esto solo ocurre cuando n toma valores impares $(n \to 2n + 1)$, por lo tanto, sustituimos y operamos:

$$3 \cdot [4 + 9 \cdot (2n + 1)] + 1 = 4 + 9 \cdot (6n + 4).$$

3.- Tercera operación, aplicamos f :

Tras aplicar g siempre obtenemos números pares, por lo tanto, no es necesario modificar el valor de n :

$\frac{4+9\cdot(6n+4)}{2} = 2 + 9 \cdot (3n + 2).$

Tras realizar la tercera operación hemos obtenido el subconjunto $A_f = \{2 + 9 \cdot (3n + 2) : n \in \mathbb{N}_0\}$ al cual le aplicaremos las funciones inversas en el orden inverso, es decir, las siguientes funciones en el siguiente orden:

Partimos de $A_f = \{2 + 9 \cdot (3n + 2) : n \in \mathbb{N}_0\}$:

1.- Primera operación inversa, aplicamos f^{-1}:

$2 \cdot [2 + 9 \cdot (3n + 2)] = 4 + 9 \cdot (6n + 4).$

2.- Segunda operación inversa, aplicamos g^{-1}:

$$\frac{4+9\cdot(6n+4)-1}{3} = 4 + 9 \cdot (2n + 1).$$

3.- Tercera operación inversa, aplicamos f^{-1}:

$$2 \cdot [4 + 9 \cdot (2n + 1)] = 8 + 9 \cdot (4n + 2).$$

En la segunda operación inversa hemos obtenido el subconjunto $A_i \subset A_8$ $A_i = \{8 + 9 \cdot (4n + 2) : n \in \mathbb{N}_0\}$ cuyos elementos tienen como primer segmento de órbita digital el que hemos fijado al principio de este ejemplo. Por tal de que puedan comprobarlo, les comparto la siguiente hoja de cálculo que nos permite ver la órbita digital extendida de un número dado:

Hoja de Cálculo (fuente propia).

Por tal de asegurar el entendimiento de este apartado, calcularemos un segundo ejemplo empleando este método. Calculemos el subconjunto $A_i \subset A_3$ cuyos elementos siguen el segmento compuesto siguiente:

$A_3 \mapsto A_1 \to A_5 \to A_7 \mapsto A_4 \to A_2$.

Segmento que tiene seis componentes, por lo tanto $p = 6$. En consecuencia, aplicaremos $p - 1$ funciones, es decir, cinco funciones. En este caso son las siguientes:

1.- Aplicamos g.

2.- Aplicamos f.

3.- Aplicamos f.

4.- Aplicamos g.

5.- Aplicamos f.

Comenzamos por $A_s = A_3 = \{3 + 9 \cdot n : n \in \mathbb{N}_0\}$ recordando las situaciones A) y B) mostradas al principio de esta sección, donde se indica cuando se modifica n.

1.- Primera operación, aplicamos g:

En este caso, solo podemos multiplicar por tres y sumar uno si todos los elementos del subconjunto A_3 son impares, y esto solo ocurre cuando n toma valores pares ($n \to 2n$), por lo tanto, sustituimos y operamos:

$3 \cdot [3 + 9 \cdot (2n)] + 1 = 1 + 9 \cdot (6n + 1)$.

2.- Segunda aplicación, aplicamos f:

Tras aplicar la función g siempre obtenemos números pares, por lo tanto, podemos operar sin modificar n.

$$\frac{1+9\cdot(6n+1)}{2} = 5 + 9 \cdot (3n).$$

3.- Tercera operación, aplicamos f:

En este caso, solo podremos dividir entre dos si todos los elementos de $\{5 + 9 \cdot (3n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ son pares, y esto solo ocurre cuando n toma valores impares ($n \to 2n + 1$), por lo tanto, sustituimos y operamos:

$$\frac{5+9\cdot\big(3\cdot(2n+1)\big)}{2} = 7 + 9 \cdot (3n + 1).$$

4.- Cuarta operación, aplicamos g:

En este caso, solo podremos multiplicar por tres y sumar uno si todos los elementos de $\{7 + 9 \cdot (3n + 1) : n \in \mathbb{N}_0\}$ son impares, y esto solo ocurre cuando n toma valores impares ($n \to 2n + 1$), por lo tanto, sustituimos y operamos:

$3 \cdot [7 + 9 \cdot (3 \cdot (2n + 1) + 1)] + 1 = 4 + 9 \cdot (18n + 14)$.

5.- Quinta operación, aplicamos f:

Tras aplicar la función g siempre obtenemos números pares, por lo tanto, podemos operar sin modificar n :

$\frac{4+9\cdot(18n+14)}{2} = 2 + 9 \cdot (9n + 7)$.

Tras aplicar la quinta operación obtenemos el subconjunto $A_f = \{2 + 9 \cdot (9n + 7) : n \in \mathbb{N}_0\}$, al cual le aplicaremos las funciones inversas en el orden inverso, es decir, en el siguiente orden:

1.- Primera función inversa, aplicamos f^{-1}:

$2 \cdot [2 + 9 \cdot (9n + 7)] = 4 + 9 \cdot (18n + 14)$.

2.- Segunda operación inversa, aplicamos g^{-1}:

$\frac{4+9\cdot(18n+14)-1}{3} = 7 + 9 \cdot (6n + 4)$.

3.- Tercera operación inversa, aplicamos f^{-1}:

$2 \cdot [7 + 9 \cdot (6n + 4)] = 5 + 9 \cdot (12n + 9)$.

4.- Cuarta operación inversa, aplicamos f^{-1}:

$2 \cdot [5 + 9 \cdot (12n + 9)] = 1 + 9 \cdot (24n + 19)$.

5.- Quinta operación inversa, aplicamos g^{-1}:

$\frac{1+9\cdot(24n+19)-1}{3} = 3 + 9 \cdot (8n + 6)$.

Tras la quinta operación inversa hemos obtenido el subconjunto $A_i = \{3 + 9 \cdot (8n + 6) : n \in \mathbb{N}_0\}$, cuyos elementos siguen el segmento compuesto que hemos determinado al principio de este ejemplo.

Recordemos que mediante este método podemos calcular los elementos que siguen cualquier segmento compuesto, ya sea aplicable a la conjetura o no, y, consecuencia, los elementos que siguen cualquier órbita digital.

3.2 Refutación de las dos afirmaciones.

1.- Existe un número natural que forma un bucle cerrado distinto al trivial.

2.- Existe un número natural que, al ser sometido a la conjetura, crece con una tendencia al infinito.

Si buscamos demostrar que estas dos afirmaciones son falsas, deberemos tener en cuenta que aquellos números que refutan la conjetura de una de las dos formas anteriores siguen un segmento de órbita digital compuesto por infinitos segmentos elementales. Entiéndase lo siguiente:

- Los bucles cerrados repiten de forma indefinida un mismo segmento compuesto.
- Aquellos hipotéticos números que crecen con tendencia al infinito siguen un segmento de órbita digital compuesto por infinitos segmentos elementales, ya que la tendencia al infinito no tiene un fin.

Por otro lado, también debemos saber que toda órbita digital extendida que estudiemos estará conformada por infinitos segmentos elementales, ya que estaremos considerando el bucle trivial, el cual no tiene fin.

Por lo tanto, si queremos estudiar los elementos que refutan la conjetura y los elementos que la cumplen, tendremos que estudiar aquellos segmentos compuestos que se construyen a partir de infinitos segmentos elementales. Haciendo esto, deduciremos que aquellos elementos de A_i que siguen un segmento compuesto por infinitos segmentos elementales, siempre pertenecen a uno de los dos subconjuntos siguientes:

(4) $A_i = \left\{ \lim_{x \to \infty} \square\, s + 9 \cdot (x \cdot n + y) : n,\, y \in \mathbb{N}_0 \right\} = \mathbb{N}.$

(5) $A_i = \left\{ \lim_{x,\, y \to \infty} \square\, s + 9 \cdot (x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$

El primer paso es recordar que, en el punto 3.1, hemos visto como aumentaban los elementos de los subconjuntos A_i a medida que añadíamos segmentos elementales al segmento compuesto. Veíamos también que, cuando operábamos con un conjunto que contenía tanto elementos pares como impares, se producía una sustitución de n por $2n$ o por $2n+1$ según si queríamos hacer referencia a los elementos pares o a los elementos impares. Las sustituciones que se dan durante el proceso de obtención del subconjunto A_i son sumamente importantes, pues definen es su totalidad el conjunto A_i que buscamos calcular. Por ejemplo, recordemos el proceso que hemos llevado a cabo en el punto anterior, en el cual se buscaba encontrar el subconjunto de elementos $A_i \subset A_8$ cuyos elementos siguen el siguiente segmento compuesto:

$A_8 \rightarrow A_4 \mapsto A_4 \rightarrow A_2.$

Si recordamos, durante el proceso de calcular el subconjunto A_i, tuvimos que sustituir el valor de n dos veces. La primera vez n por $2n$, mientras que la segunda vez sustituimos el valor de n por $2n+1$. En la otra mano, el subconjunto A_i que habíamos obtenido tenía la siguiente forma:

$A_i = \{8 + 9 \cdot (6n + 2) : n \in \mathbb{N}_0\}.$

Subconjunto que se puede reescribir del siguiente modo:

$A_i = \{8 + 9 \cdot \left(2 \cdot (2n + 1)\right) : n \in \mathbb{N}_0\}.$

Si nos fijamos en el paréntesis, podemos observar las sustituciones que se han realizado a n en orden, desde fuera hacia dentro.

Para visualizar mejor esta propiedad, veamos el segundo ejemplo que se presentó en el punto 3.1, cuando buscábamos el subconjunto A_i cuyos elementos seguían el siguiente segmento compuesto:

$A_3 \mapsto A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \mapsto A_2.$

Recordemos que, durante el proceso de calcular el subconjunto A_i, tuvimos que sustituir el valor de n tres veces. La primera sustitución fue de n por $2n$, mientras que la segunda y la tercera sustitución fueron de n por $2n+1$. Por otro lado, el subconjunto que habíamos conseguido era el siguiente:

$A_i = \{3 + 9 \cdot (8n + 6) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Subconjunto que se puede reescribir del siguiente modo:

$A_i = \{3 + 9 \cdot \big(2 \cdot (2 \cdot (2n + 1) + 1)\big) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Si nos fijamos en el paréntesis, podemos observar nuevamente las sustituciones que se han realizado a n en orden, desde fuera hacia dentro.

Esta es una propiedad presente en todos los subconjuntos A_i, lo que significa que podemos describir los subconjuntos A_i sin la necesidad de aplicar las funciones inversas, ya que solo necesitamos saber cuáles son las sustituciones de n.

Una vez introducida esta propiedad común en todos los subconjuntos A_i, podemos pasar a estudiar aquellos segmentos compuestos que se construyen a partir de infinitos segmentos elementales, los cuales, si recordamos, incluirán aquellos segmentos compuestos que siguen las siguientes clases de elementos:

1.- Los elementos naturales que sí cumplen la conjetura.

2.- Los hipotéticos elementos que forman un bucle cerrado distinto al trivial.

3.- Los hipotéticos elementos que crecen con tendencia al infinito.

Esto es así por los motivos que hemos presentado al principio de este punto.

Al estudiar los segmentos compuestos de longitud infinita, lo haremos clasificándolos según las modificaciones que se le aplican a n durante el cálculo de A_i, ya que, al haber infinitas iteraciones, ha de haber por fuerza infinitas sustituciones del valor n. Si hacemos esto conseguiremos cinco grandes clases de segmentos compuestos:

Caso A:

Todo segmento compuesto de longitud infinita donde siempre que se da la sustitución de n es sustituido por $2n$. Por ejemplo, el siguiente segmento compuesto:

$(A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto (A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto (A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto \cdots$.

Donde los elementos que siguen este segmento compuesto en concreto pertenecen al siguiente subconjunto:

$A_i = \{4 + 9 \cdot (2^{2t} \cdot n) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Expresión que se puede reescribir de forma visual, aunque sin ninguna formalidad, del siguiente modo:

$A_i = \Big\{4 + 9 \cdot \Big(2 \cdot \Big(2 \cdot \big(2 \cdot (\ldots (2n) \ldots)\big)\Big)\Big) : n \in \mathbb{N}_0\Big\}$.

En el anexo se adjuntan los cálculos realizados para obtener este subconjunto.

Podemos afirmar con total seguridad que todos los elementos que siguen segmentos compuestos del caso A, siempre pertenecen a un subconjunto con la siguiente forma:

$$A_i = \left\{ \lim_{x \to \infty} s + 9 \cdot (2^x \cdot n) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{s\}.$$

Es decir, los únicos elementos cuyas órbitas digitales extendidas cumplen las condiciones del caso A son los nueve primeros números naturales empezando por el uno, algo fácil de comprobar.

Con esto concluimos el caso A, donde todos sus elementos cumplen la conjetura.

Caso B:

Todo segmento compuesto de longitud infinita donde, si se sustituye n , se sustituye por $2n + 1$. Por ejemplo, el siguiente segmento compuesto:

$$(A_7 \to A_8) \mapsto (A_7 \to A_8) \mapsto (A_7 \to A_8) \mapsto \cdots.$$

Donde los elementos que siguen el anterior segmento compuesto pertenecen al siguiente subconjunto:

$$A_i = \left\{ \lim_{t \to \infty} 7 + 9 \cdot (2^t \cdot n + 2^t - 1) : n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Expresión que se puede reescribir de forma visual, pero sin ninguna formalidad, del siguiente modo:

$$A_i = \{7 + 9 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (\ldots (2n + 1) \ldots) + 1) + 1) + 1) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Podemos afirmar con total seguridad que, todos los elementos que siguen segmentos compuestos del caso B, pertenecen siempre a un subconjunto con la siguiente forma:

$$A_i = \left\{ \lim_{x,\, y \to \infty} s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$$

Esto implica que no existe ningún elemento natural capaz de seguir ninguno de los segmentos compuestos del caso B, ya que todas las soluciones son divergentes.

Con esta afirmación concluimos el caso B.

Caso C:

Todo segmento compuesto de longitud infinita donde haya infinitas sustituciones de n por $2n$ e infinitas sustituciones de n por $2n + 1$.

Los elementos que siguen esta clase de segmentos compuestos siempre tienen la siguiente estructura asociada, la cual es equivalente a la del caso B:

$$A_i = \left\{ \lim_{x,\, y \to \infty} s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$$

Esto implica que no existe ningún elemento natural capaz de seguir ninguno de los segmentos compuestos del caso C, dado que todas las soluciones son divergentes y no aplicables a la conjetura.

Con esta afirmación concluimos el caso C.

Caso D:

Todo segmento compuesto de longitud infinita donde haya una cantidad finita de sustituciones de n por $2n$ e infinitas sustituciones de n por $2n + 1$.

Los elementos que siguen esta clase de segmentos compuestos siempre tienen la siguiente estructura asociada, la cual es equivalente a la de los casos B y C, ya que se dan infinitas sustituciones de n por $2n + 1$:

$$A_i = \left\{ \lim_{x,\, y \to \infty} s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$$

Con esto podemos afirmar que no existe ningún elemento natural que sea capaz de seguir ningún segmento compuesto del caso D, ya que todas las soluciones son divergencias.

Con esta afirmación concluimos el caso D.

Caso E:

Todo segmento compuesto de longitud infinita donde haya una cantidad finita de sustituciones de n por $2n + 1$ y una cantidad infinita de sustituciones de n por $2n$. Por ejemplo, el siguiente segmento compuesto:

$$A_5 \to A_7 \to A_8 \to A_4 \to A_2 \to A_1 \mapsto (A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto (A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto \cdots.$$

Donde los elementos que siguen este segmento compuesto pertenecen al siguiente subconjunto:

$$A_i = \left\{ \lim_{t \to \infty} 5 + 9 \cdot (2^3 \cdot n \cdot 2^{2t} + 3) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{5 + 9 \cdot (3)\} = \{32\}.$$

Podemos afirmar con total seguridad que, todos los elementos que siguen segmentos compuestos del caso E, pertenecen siempre a un subconjunto con la siguiente forma:

$$A_i = \left\{ \lim_{x \to \infty} s + 9 \cdot (2^x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0,\ y \in \mathbb{N} \right\} = \{s + 9 \cdot y : y \in \mathbb{N}\}.$$

Tras esto, podemos afirmar que todos los números naturales, sin incluir los nueve primeros, siguen segmentos compuestos del caso E. Esto podemos deducirlo del siguiente modo: las órbitas digitales extendidas de los números naturales, de longitud infinita, deben estar en alguno de los cinco casos ya presentados y, al no estar en ninguno de los cuatro primeros, deben estar por fuerza en el quinto caso, el E.

Hemos demostrado que los números naturales pertenecen al caso A y al caso E, pero esto no demuestra que estos elementos lleguen al bucle trivial en una cantidad finita de iteraciones. Demostrar que los elementos del grupo A cumplen la conjetura es un trabajo sencillo, pues son de magnitudes pequeñas. Por otro lado, para demostrar que todos los elementos del grupo E cumplen la conjetura, tendremos que ser algo más originales.

El método consistirá en tratar de obtener todos los elementos del caso E partiendo del caso A, añadiendo sustituciones de n y cumpliendo las condiciones de cada caso. Sin embargo, en vez de considerar únicamente una de las dos posibles sustituciones, consideraremos ambas posibilidades, cubriendo así todos los caminos.

Recordemos que estamos estudiando los casos A y E cuando $n = 0$, ya que si $n \neq 0$ entonces el subconjunto A_i resulta estar vacío. Véanse las ecuaciones asociadas a cada caso.

Partimos del subconjunto de elementos del caso A:

$$\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot (2^x \cdot 0)\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

Y ahora añadimos una sustitución de n recordando que hemos de considerar las dos posibilidades:

A) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2^x \cdot 0)]\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$

B) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1]\right\} = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18\}.$

Ahora, a partir de los anteriores subconjuntos volveremos a añadir una sustitución, teniendo en cuenta ambas posibles sustituciones de n :

A.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right)\right]\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$

A.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right]\right\} = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18\}.$

B.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1)]\right\} = \{19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27\}.$

B.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1) + 1]\right\} = \{28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36\}.$

El siguiente paso es añadir otra sustitución, teniendo en cuenta ambas posibles sustituciones:

A.1.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2^3 \cdot (2^x \cdot 0)]\right\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$

A.1.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right)\right) + 1\right]\right\} = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18\}.$

A.2.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right)\right]\right\} = \{19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27\}.$

A.2.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right) + 1\right]\right\} = \{28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36\}.$

B.1.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1)\right)\right]\right\} = \{37,\ 38,\ 39,\ 40,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45\}.$

B.1.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot \left[2 \cdot \left(2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1)\right) + 1\right]\right\} = \{46,\ 47,\ 48,\ 49,\ 50,\ 51,\ 52,\ 53,\ 54\}.$

B.2.1) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1) + 1)]\right\} = \{55,\ 56,\ 57,\ 58,\ 59,\ 60,\ 61,\ 62,\ 63\}.$

B.2.2) $\left\{\lim_{x\to\infty} \square\, s + 9 \cdot [2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2^x \cdot 0) + 1) + 1) + 1]\right\} =$
$\{64,\ 65,\ 66,\ 67,\ 68,\ 69,\ 70,\ 71,\ 72\}.$

Como podemos ver, si continuamos añadiendo sustituciones, podemos expresar todos los elementos naturales en una cantidad finita de sustituciones partiendo del caso A, y todas cumplen las condiciones del caso E.

Si nos fijamos en los diferentes grupos de elementos (A, B, A.1, B.1, A.2, B.2, A.1.1, …) vemos que hay muchas formas de representar un mismo número. La diferencia radica en la cantidad de sustituciones de n por $2n$ que se aplica tras partir de la expresión del caso A. A partir de aquí, hay que entender que cada número natural es expresable solo de una forma.

Por ejemplo, el número natural trece se puede expresar de los siguientes modos:

$$13 = \lim_{x\to\infty} 4 + 9 \cdot \left(2 \cdot \left(2 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right).$$

$$13 = \lim_{x\to\infty} 4 + 9 \cdot \left(2 \cdot \left(2^4 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right)$$

Sin embargo, si queremos describir el elemento que sigue la órbita digital extendida del número trece, la única manera de expresarlo correctamente sería la siguiente:

$$13 = \lim_{x\to\infty} 4 + 9 \cdot \left(2 \cdot \left(2^6 \cdot (2^x \cdot 0)\right) + 1\right).$$

Solución que pertenece al subconjunto de números que sigue el siguiente segmento compuesto:

$$A_4 \mapsto A_4 \to A_2 \to A_1 \to A_5 \mapsto A_7 \to A_8 \to A_4 \to A_2 \to A_1 \mapsto (A_4 \to A_2 \to A_1) \mapsto \cdots.$$

Donde el subconjunto que sigue el anterior segmento compuesto es:

$$A_i = \left\{\lim_{x\to\infty} 4 + 9 \cdot (2^7 \cdot (2^x \cdot n) + 1) : n \in \mathbb{N}_0\right\} = \{13\}.$$

Debido a que existe una única forma de expresar cada número natural y hemos encontrado la forma de expresar cada uno de los números naturales partiendo del bucle trivial y cumpliendo las condiciones del caso E, podemos asegurar que todos los números de los casos A y E cumplen la conjetura de Collatz. Es por eso por lo que, por mucho que busquemos un hipotético segmento compuesto del caso E que no llegue al bucle trivial, no lo encontraremos. Una forma de entender esto es con la siguiente analogía:

Tenemos cincuenta cajitas huecas de madera, y decidimos esconder al azar una única canica en una de ellas. Cuando tratemos de encontrarla, iremos abriendo las cajitas una a una hasta encontrarla y, cuando la hayamos encontrado, por ejemplo, en la tercera caja, será inútil buscar en las cuarentaisiete cajitas restantes, pues no encontraremos otra canica adicional.

Esta analogía es una buena forma de explicar el motivo por el cual por mucho que busquemos un contraejemplo a la conjetura, no lo encontraremos.

Si buscamos una respuesta más matematizada, entonces entiéndase la siguiente solución:

$$Si\ \exists B,\ B \neq \emptyset \ \to\ A \neq \mathbb{N} : B \cup A = \mathbb{N}\ .$$

Donde B es el conjunto de los hipotéticos contraejemplos y A es el conjunto de los números naturales que cumplen la conjetura de Collatz.

Escrito de otro modo:

Si B es un conjunto no vacío, entonces A no puede representar el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, pero la unión de los conjuntos A y B es igual al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Sin embargo, como ya hemos estudiado, sabemos que el conjunto A es capaz de expresar todo $\mathbb{N}$. Entonces, sabiendo esto:

$$Si\, A = \mathbb{N} \to \nexists B\,.$$

Esto significa que no existe B y que todos los números naturales pertenezcan al conjunto A. Debido a que no existe B, la conjetura de Collatz resulta ser cierta.

IV.- Conclusiones:

Tras estudiar todas las posibles órbitas y, en consecuencia, todas las órbitas digitales, hemos logrado asociar a cada número natural una órbita digital que, en una cantidad finita de iteraciones, llega al número natural uno, cumpliendo así la conjetura de Collatz. Con esto, también hemos logrado asociar una órbita digital a los hipotéticos elementos que refutaban la conjetura, viendo que todas las soluciones a estas órbitas digitales son divergencias no aplicables a la conjetura.

Véanse las siguientes ecuaciones obtenidas en el marco practico:

Elementos que sí cumplen la conjetura:

$$A_i = \left\{ \lim_{x \to \infty} s + 9 \cdot (x \cdot n + y) : n,\ y \in \mathbb{N}_0 \right\} = \mathbb{N}.$$

Elementos que refutan la conjetura:

$$A_i = \left\{ \lim_{x,\ y \to \infty} s + 9 \cdot (x \cdot n + y) : n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \emptyset.$$

Bibliografía:

Colaboradores de Wikipedia. (2022, 30 noviembre). *Conjetura de Collatz*. Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Collatz

Veritasium. (2021, 30 julio). *The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=094y1Z2wpJg

Veritasium en español. (2021, 22 agosto). *NO Podrás Resolver este Simple Problema Matemático ¿O Sí?* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=q_dvxXc7d2Y

Gonzalo Vilches (2022, 11 septiembre). *Diagrama de órbitas definitivo*. prezi.com. https://prezi.com/view/gmpEXeYnuuKbl96rGoxd/

Órbita Digital de «a». (2022, 1 diciembre). Google Docs. https://docs.google.com/spreadsheets/d/1x_FfvlIZ36ah_As5K930jpfplyn2obHJ46BLVXOt06c/edit